



基于预处理共轭梯度法的低复杂度信号检测算法

曲桦^{1,2}, 梁静¹, 赵季红^{1,2}, 王伟华¹

(1. 西安交通大学软件学院, 陕西 西安 710049;

2. 西安邮电大学通信与信息工程学院, 陕西 西安 710061)

摘要: 大规模多输入多输出系统中, 最小均方误差信号检测算法是近似最优的, 但由于其涉及矩阵求逆, 计算复杂度随着天线数量增加呈指数增长。提出了低复杂度的预处理共轭梯度信号检测算法, 该算法通过预处理技术降低矩阵条件数, 从而加快共轭梯度信号检测算法的收敛速度。仿真结果显示, 该算法在小数量的迭代中能够达到和最小均方误差检测算法相似的误码率, 算法复杂度下降了一个数量级。相比直接用共轭梯度法, 能够更快收敛到最佳值。

关键词: 大规模多输入多输出; 共轭梯度法; 最小均方误差

中图分类号: TN929.5

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2016092

Low-complexity signal detection algorithm based on preconditioned conjugate gradient method

QU Hua^{1,2}, LIANG Jing¹, ZHAO Jihong^{1,2}, WANG Weihua¹

1. School of Software Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

2. School of Electronic and Telecommunication Engineering, Xi'an Posts & Telecommunications University, Xi'an 710061, China

Abstract: For large-scale multiple-input multiple-output system, minimum mean square error signal detection algorithm is near-optimal but involves matrix inversion, and complexity is growing exponentially. So less-complexity signal detection algorithm using preconditioned conjugate gradient method was proposed, the algorithm reduced the condition number of matrix by pretreatment technology, thus speeding up the convergence rate of conjugate gradient signal detection algorithm. The simulation results show that the proposed algorithm can achieve the near-optimal bit error rate performance of minimum mean square error detection algorithm with a small number of iterations, and computation complexity reduces a order of magnitude. Compared with the conjugate gradient method, the proposed algorithm can quickly converge to the optimum value.

Key words: large-scale multiple-input multiple-output, conjugate gradient method, minimum mean square error

收稿日期: 2015-12-16; 修回日期: 2016-03-08

通信作者: 梁静, xjtuljing@163.com

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.61371087); 国家高技术研究发展计划(“863”计划)基金资助项目(No.2014AA01A706)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61371087), The National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (No.2014AA01A706)

1 引言

多输入多输出 (multiple-input multiple-output, MIMO) 技术已经成功应用在许多无线通信系统中^[1,2],但是受MIMO系统中的天线数量限制,基站(base station, BS)端无法服务更多数量的用户,因此大规模 MIMO (large-scale multiple-input multiple-output, LS-MIMO) 系统成为研究者们关注的重点^[3,4]。LS-MIMO 系统的突出优点是 BS 端同时服务多个用户,目前面临的问题之一是如何在保证良好误码率(bit error rate, BER)的前提下,降低检测算法的复杂度。一般考虑线性信号检测算法,比如迫零(zero forcing, ZF)检测算法和最小均方误差(minimum mean square error, MMSE)信号算法,但是这两种线性算法在天线数量增大时,计算复杂度呈指数增长^[5]。研究人员开始考虑将线性方程组的求解算法(比如迭代法)应用在信号检测中^[6]。迭代法^[7]有参数迭代法、共轭梯度(conjugate gradient, CG)法、共轭残量法等,求解大型线性方程组以共轭梯度法和变形共轭梯度法为主^[8],其具有存储量少、计算量少的优点。参考文献[9]中将纽曼级数近似(Neumann series approximation, NSA)算法应用在 LS-MIMO 系统中,避免了精确求逆,获得了近似精确求逆的 BER 性能;同时,参考文献[10]在 LS-MIMO 系统中应用近似矩阵求逆算法,对比基于精确分解算法,降低了计算复杂度;参考文献[11]在参考文献[9,10]的基础上,将求解大型线性方程组的 CG 算法应用在 LS-MIMO 系统中,相比 NSA 算法,在相同的几次迭代中能够获得近似 MMSE 的 BER 性能。

基于以上分析,针对 CG 检测算法收敛速度慢的问题,本文提出了采用预处理共轭梯度(preconditioned conjugate gradient, PCG)法的低复杂度信号检测方案,通过适当的预处理方法引入预处理矩阵 M ,使得处理后的矩阵特征值分布更为集中,降低了矩阵条件数,以达到加快 CG 算法收敛速度的目的。仿真结果证明了本文提到的 PCG 算

法经过几次迭代可以达到近似 MMSE 算法的 BER 性能,在相同迭代条件下相比 CG 算法,PCG 算法能够更快收敛到最佳值。

2 系统模型

考虑如图 1 所示的系统模型,假定发送天线和接收天线数目分别为 N_t 和 N_r (一般来说 $N_r \gg N_t$),LS-MIMO 系统的无线信道是平坦衰落的,接收信号模型如下所示:

$$y = Hx + n \quad (1)$$

其中, y 、 x 和 n 分别是 $N_r \times 1$ 维接收信号列向量、 $N_t \times 1$ 维发送信号列向量以及 $N_r \times 1$ 维独立同分布噪声信号列向量, H 是 $N_r \times N_t$ 维平坦瑞利衰落 LS-MIMO 系统信道矩阵,其中,元素 $h_{ij}(i=1, \dots, N_r, j=1, \dots, N_t)$ 均值为 0、方差为 1,假设获得理想的信道状态信息。

在基站端的目标是从接收端 y 中解出用户端发过来的信号 x 。根据参考文献[11],MMSE 检测算法发射端信号 x 可以表示为:

$$x = (H^H H + \sigma^2 I_{N_t})^{-1} H^H y = W^{-1} \bar{y} \quad (2)$$

$(\cdot)^T$ 、 $(\cdot)^H$ 和 $(\cdot)^{-1}$ 分别表示转置、共轭转置和矩阵求逆。

其中, $\bar{y}$ 表示为:

$$\bar{y} = H^H y \quad (3)$$

W 表示为:

$$W = H^H H + \sigma^2 I_{N_t} \quad (4)$$

I_{N_t} 表示 $N_t \times N_t$ 单位矩阵,式(2)稍作变形:

$$Wx = \bar{y} \quad (5)$$

这样信号检测算法的关键就在于求解式(5)中的线性方程组。

3 预处理共轭梯度检测算法

MMSE 信号检测算法中,求 W^{-1} 的计算复杂度是 $O(K^3)$ (K 为发射天线数量),随着 K 的增长,复杂度呈指数增长,不适合应用在 LS-MIMO 系统中。参考文献[11]

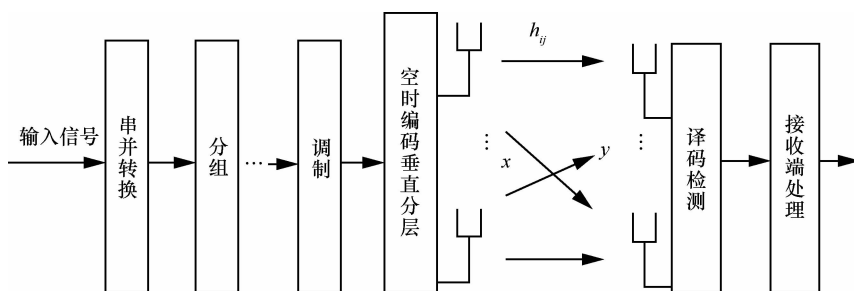


图 1 LS-MIMO 系统模型



中应用 CG 信号检测算法,通过几次迭代获得了和 MMSE 算法相似的 BER 性能,并且避免了矩阵求逆,算法复杂度下降了约一个数量级。在本节提出了基于 PCG 的信号检测算法,该算法比起直接应用 CG 信号检测算法有着更快的收敛速度,收敛速度取决于所选取的预处理矩阵 M 的好坏。

3.1 预处理矩阵的选取

设 A 为 n 阶对称正定矩阵,考虑线性方程组(6):

$$Ax=b \quad (6)$$

其中, x 是未知向量, b 是右端已知向量, $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 非奇异。一个好的预处理矩阵 M 应该具有对称正定、与线性方程组系数矩阵 A 稀疏性相近、预处理后的线性方程组易于求解等特征。本文采用矩阵分裂法获得预处理矩阵 M 。矩阵分裂法中有雅可比(Jacobi)矩阵分裂法、高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)矩阵分裂法等,将 A 分裂成 $A=D+L+U$, 其中:

$$D=\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \quad (7)$$

$$L=\text{tril}(A) \quad (8)$$

这里, L 为 A 的下三角矩阵,采用 Gauss-Seidel 矩阵分裂法,由式(7)、式(8)取 $M=D+L$ 。根据分裂法相关性质, M 为预处理矩阵且为对称正定矩阵,对式(6)方程组两边同乘以 M^{-1} 得到式(9):

$$M^{-1}Ax=M^{-1}b \quad (9)$$

设 $M^{-1}A=B$, $M^{-1}b=c$, 将式(9)转化为:

$$Bx=c \quad (10)$$

3.2 共轭梯度检测算法

对于任意一个 $N \times 1$ 的非零向量 x , 式(4)有:

$$(Hx)^H Hx = x^H (H^H H)x > 0 \quad (11)$$

说明 $H^H H$ 是正定矩阵,且噪声方差 σ^2 也是正定的,故 MMSE 滤波矩阵 $W=H^H H + \sigma^2 I_N$ 也是正定矩阵,本文中系数矩阵 $A=W$, 根据式(10),由于 $B=M^{-1}A=M^{-1}W$, 易证 B 也是正定非奇异矩阵。故考虑用 CG 法求解式(10)。将式(10)的求解转化为求最小值问题:

$$\min_x \phi(x) = \frac{1}{2} (x, Bx) - (c, x) \quad (12)$$

其中, $(x, y) = x^H y$ 表示求两个向量的内积,进而可以得到线性方程组的负梯度为:

$$-\nabla \phi(x^{(i)}) = c - Bx^{(i)} = d^{(i)} \quad (13)$$

若已知点 $x^{(i+1)}$ 和搜索方向 $d^{(i)}$, 则沿 $d^{(i)}$ 进行搜索,令 $\{p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(i)}\}$ 为相对矩阵系数 B 的共轭方向,有:

$$(p^{(i)})^H B p^{(j)} = 0, \quad i \neq j \quad (14)$$

根据不同的迭代方向,经过有限步骤可以使得 $\phi(x)$ 最小。因此得出 x 的估计 $\bar{x}$ 为:

$$\bar{x}^{(i+1)} = \bar{x}^{(i)} + \alpha^{(i)} p^{(i)}, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

在这里, $\alpha^{(i)}$ 是一个标量, i 表示迭代次数。在 CG 算法中,每一个方向 $p^{(i)}$ 都是由 $p^{(i-1)}$ 和负梯度方向 $d^{(i)}$ 的线性组合组成,该方向也是最快速的下降方向。由式(13)得出:

$$p^{(i)} = d^{(i)} + \beta^{(i-1)} p^{(i-1)} \quad (16)$$

$\beta^{(i-1)}$ 是一个标量, $p^{(0)}$ 是最初的搜索方向,通常选初始点的最快速的下降方向作为初始搜索方向^[10], $p^{(0)} = d^{(0)}$ 。在本文中,通过式(3)~式(5)可得出:

$$B = M^{-1}A = M^{-1}W \quad (17)$$

$$c = M^{-1}b = M^{-1}H^H y \quad (18)$$

将式(17)、式(18)代入式(10)可得:

$$M^{-1}Wx = M^{-1}H^H y \quad (19)$$

应用 CG 算法求解式(19),引用参考文献[11]的结论,得到基于 Gauss-Seidel 矩阵分裂法的 PCG 信号检测算法。首先初始化向量:初始向量 $\bar{x}^0 = 0$ (全零矩阵);误差残量 $r^0 = c - M^{-1}H^H y$; 下一搜索方向 $p^{(0)} = r^{(0)}$; 迭代次数 $i=0$ 。该算法具体计算步骤如下。

(1) 设置循环条件 $r^{(i)} \neq 0$ (全零矩阵)。

(2) 计算参数 $\alpha^{(i)} = \frac{(r^{(i)})^H (r^{(i)})}{(r^{(i)})^H M^{-1}W p^{(i)}}$ 。

(3) 计算估计信号 $\bar{x}^{(i+1)} = \bar{x}^{(i)} + \alpha^{(i)} p^{(i)}$ 。

(4) 计算误差残量 $r^{(i+1)} = r^{(i)} - \alpha^{(i)} M^{-1}W p^{(i)}$ 。

(5) 计算参数 $\beta^{(i)} = \frac{(r^{(i+1)})^H (r^{(i+1)})}{(r^{(i)})^H (r^{(i)})}$ 。

(6) 计算下一个梯度方向 $p^{(i+1)} = r^{(i+1)} + \beta^{(i)} p^{(i)}$ 。

(7) 迭代次数 $i=i+1$ 。

(8) 重复步骤(1)~(7),继续循环,直到不满足循环条件跳出。

(9) 最终输出 $\bar{x} = \bar{x}^{(i+1)}$ 。

3.3 复杂度分析

本节分析 PCG 检测算法的复杂度,这里 K 指的是发射天线数量。根据第 3.2 节算法步骤, $\alpha^{(i)}$ 需要 $1 \times K$ 的 $(r^{(i)})^H$ 和 $K \times 1$ 的 $r^{(i)}$ 相乘,和 $1 \times K$ 的 $(r^{(i)})^H$ 、 $K \times K$ 的 $M^{-1}W$ 、 $K \times 1$ 的 $p^{(i)}$ 相乘,因此计算 $\alpha^{(i)}$ 需要 $K^2 + 2K$ 次乘法。计算 $\bar{x}^{(i+1)}$ 需要 K 次乘法, $r^{(i+1)}$ 需要参数 $\alpha^{(i)}$ 、 $K \times K$ 的 $M^{-1}W$ 、 $K \times 1$ 的 $p^{(i)}$ 相乘,计算 $r^{(i+1)}$ 需要 $K^2 + K$ 次乘法。 $\beta^{(i)}$ 需要 $1 \times K$ 的 $(r^{(i+1)})^H$ 和 $K \times 1$ 的 $r^{(i+1)}$ 相乘, $1 \times K$ 的 $(r^{(i)})^H$ 和 $K \times 1$ 的 $r^{(i)}$ 相乘,故计算 $\beta^{(i)}$

需要 $2K$ 次乘法。计算 $p^{(i+1)}$ 需要 K 次乘法。综上所述,CG 检测算法每一次迭代需要 $2K^2+7K$ 次乘法。相比 MMSE 检测算法的复杂度 $O(K^3)$,算法复杂度下降了约一个数量级。

预处理矩阵的目的是使得经处理后的矩阵条件数降低。矩阵条件数是指线性方程组(10)的解对 c 中的误差或者不确定度的敏感性的度量,数学定义等于矩阵 B 的范数与 B 的逆的范数的乘积,即:

$$\text{cond}(B)=\|B\|\cdot\|B^{-1}\| \tag{20}$$

其中, $\|B\|$ 表示 B 的范数。条件数事实上表示了矩阵计算对于误差的敏感性。 B 的条件数越大,越病态,数值稳定性越差;相反, B 的条件数越小,数值稳定性越好。PCG 算法中矩阵条件数小于 CG 算法,故在仿真结果中将得到验证。

4 仿真实验与分析

根据上述理论分析,PCG 检测算法收敛速度快于 CG 算法,仿真两种信号(天线数量为 $N_r \times N_t=64 \times 8$ 和 $N_r \times N_t=128 \times 16$,数据流 $N=38\ 400$)得到不同信噪比(signal-to-noise ratio)下矩阵条件数对比,如图 2 所示。

同时给出天线数量 $N_r \times N_t=64 \times 8$ 时的复杂度验证结果,见表 1。

由图 2 可看出,当天线数量一定时,PCG 检测算法条件数小于 CG 检测算法条件数;当天线数量增加时,两种算法的系数矩阵条件数随之增加;同时看出 PCG 检测算法系数矩阵条件数在天线数量增加为 $N_r \times N_t=128 \times 16$ 时,小于 CG 检测算法在天线数量 $N_r \times N_t=64 \times 8$ 时的条件数;说

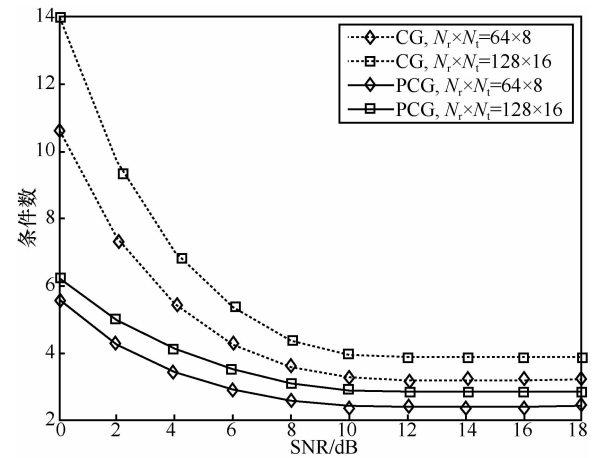


图 2 不同 SNR 的矩阵条件数

表 1 基于 Gauss-Seidel 矩阵分裂的 PCG 和 CG 检测算法迭代次数对比

迭代	CG	基于 Gauss-Seidel 矩阵分裂 PCG
迭代时间/s	2.362 4	1.510 4
迭代次数/次	6 400	5 600

明条件数越小,数值稳定性越好,因此得出当天线数量增加时,PCG 检测算法比 CG 检测算法的收敛速度更快。从表 1 可以看到,本文提到的 PCG 检测算法无论是迭代次数和迭代时间都比直接使用 CG 算法少,验证了第 3.3 节的分析。

接着给出 PCG 算法的 BER 对比,如图 3 和图 4 所示。 $N_r \times N_t=64 \times 8$ 和 $N_r \times N_t=128 \times 16$,模拟使用瑞利衰落信道,分别使用 64PSK 调制和 64QAM 调制,迭代次数 i 分别为 2、3、5,重发次数为 50。为了说明本文提到的

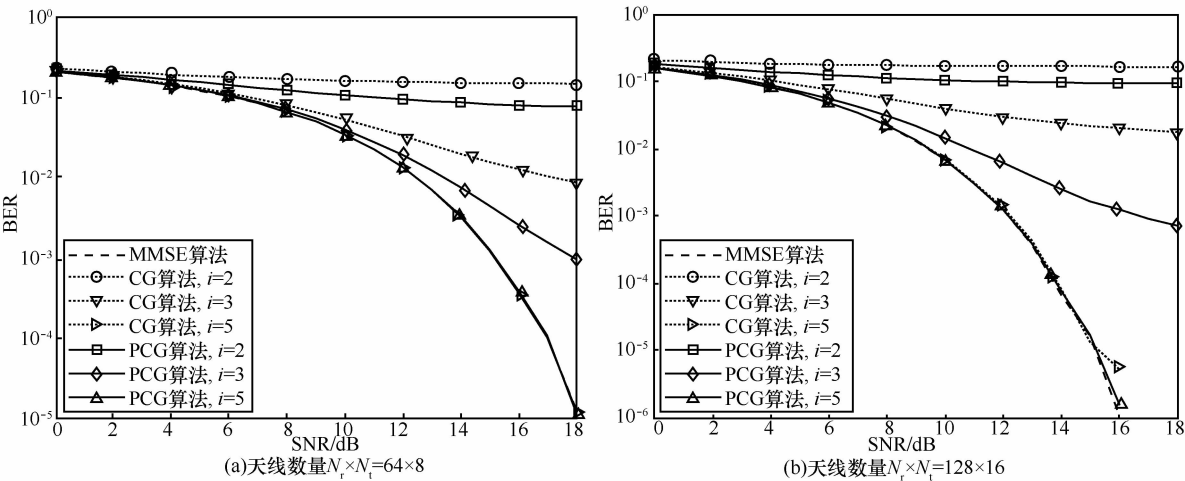


图 3 64PSK 调制下不同 SNR 下的 BER 对比

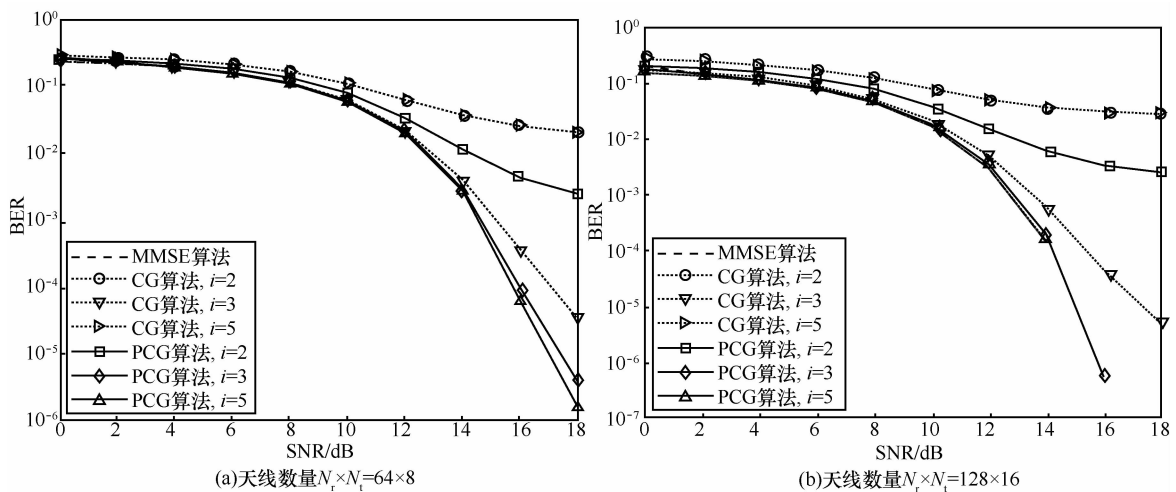


图4 64QAM调制下不同SNR下的BER对比

PCG检测算法优越性,将参考文献[12]中的CG检测算法列出。

从图3和图4中可以看出,两种算法经过5次迭代都能够达到近似MMSE检测算法的BER性能,在相同的迭代次数下,PCG检测算法比CG检测算法收敛速度快。从图4(a)可以看出,当迭代次数为3的时候,当SNR=16 dB时,PCG算法的BER相比CG算法要少约 9×10^{-4} 。结合图2、图3(b)和图4(b)得出:天线数的成倍增加,PCG检测算法系数矩阵条件数均小于CG检测算法,条件数越小,数值稳定性越好,收敛速度越快,因此比起CG算法,PCG检测算法有着较好的BER性能。

5 结束语

本文利用预处理中的矩阵分裂法,依据MMSE检测算法滤波矩阵对称正定的特性,将预处理技术应用于CG检测算法,提出了预处理共轭梯度检测(PCG)算法。通过仿真得出CG检测算法经过有限次迭代能够获得近似MMSE算法的BER性能,并且算法复杂度下降了一个数量级。PCG算法和CG算法复杂度相同,但PCG算法经过预处理,降低了矩阵条件数,从而加快了收敛速度。因此PCG信号检测算法BER性能优于CG算法。

参考文献:

[1] DAI L, WANG Z, YANG Z. Next-generation digital television terrestrial broadcasting systems: key technologies and research trends [J]. IEEE Communications Magazine, 2012, 50 (6):

150-158.

- [2] RUSEK F, PERSSON D, LAU B K, et al. Scaling up MIMO: opportunities and challenges with very large arrays [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2012, 30(1): 40-60.
- [3] HOYDIS J, TEN BRINK S, DEBBAH M. Massive MIMO in the UL/DL of cellular networks: how many antennas do we need[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2013, 31(2): 160-171.
- [4] DAI L, WANG J, WANG Z, et al. Spectrum-and energy-efficient OFDM based on simultaneous multi-channel reconstruction[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(23): 6047-6059.
- [5] GAO X, DAI L, MA Y, et al. Low-complexity near-optimal signal detection for uplink large-scale MIMO systems [J]. Electronics Letters, 2014, 50(18): 1326-1328.
- [6] 张永杰, 孙秦. 预处理矩阵及其构造方法 [J]. 长春理工大学学报, 2006, 29(4): 128-130.
ZHANG Y J, SUN Q. Preconditioned matrix and its structure methods [J]. Journal of Changchun University of Science and Technology, 2006, 29(4): 128-130.
- [7] 张凯院, 徐仲. 数值代数 (第2版)(信息与计算科学专业教材系列) [M]. 北京: 科学出版社发行处, 2006: 132-137.
ZHANG K Y, XU Z. Numerical algebra (2nd edition) (information and computing science textbook series) [M]. Beijing: Science Press Issued, 2006: 132-137
- [8] 黎勇. 几类非线性共轭梯度法的研究 [D]. 南宁: 广西大学, 2011: 8-19.
LI Y. Research on some nonlinear conjugate gradient methods [D]. Nanning: Guangxi University, 2011: 8-19.
- [9] YIN B, WU M, STUDER C, et al. Implementation trade-offs for linear detection in large-scale MIMO systems[C]//IEEE

International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'13), May 26-31, 2013, Vancouver, BC, Canada. New Jersey: IEEE Press, 2013: 2679-2683.

- [10] WU M, YIN B, VOSOUGHI A, et al. Approximate matrix inversion for high-throughput data detection in the large-scale MIMO uplink [C]//IEEE International Symposium on Circuits & Systems, May 19-23, 2013, Beijing, China. New Jersey: IEEE Press, 2013: 2155-2158.
- [11] HU Y, WANG Z, GAOL X, et al. Low-complexity signal detection using CG method for uplink large-scale MIMO systems[C]//2014 IEEE International Conference on Communication Systems (ICCS), Nov 19-21, 2014, Macau, China. New Jersey: IEEE Press, 2014: 477-481.

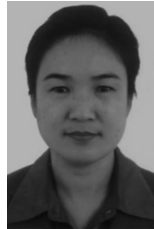
[作者简介]



曲桦(1961-),男,博士,西安交通大学教授,主要研究方向为现代通信网、计算机网络体系结构。



梁静(1989-),女,西安交通大学硕士生,主要研究方向为大规模 MIMO 系统上行检测算法。



赵季红(1963-),女,博士,西安交通大学教授,主要研究方向为宽带通信网、新一代网络的管理与控制。



王伟华(1988-),男,西安交通大学博士生,主要研究方向为阵列信号处理。